**Ex 1** (消歧义问题) 假定 是 上的有限维线性空间.

**(1)** 称 是双线性的, 当且仅当对任意向量与常数,

试证明: 是一个 -线性空间, 其对象是一些二元函数. 求其维度与基.

**(2)** 依照集合的 Cartesian 积, 定义新的集合 . 试证明 也是线性空间, 并求其维度与基.

**(3)** 试证明: 是一个 -线性空间, 其对象是一些一元函数. 求其维度与基.

为避免记号上的混乱, 往后使用 表示双线性映射.

**Ex 2** 二次型的最值问题.

实对称矩阵的结构定理: 是实对称矩阵, 当且仅当以下等价命题成立:

* 可对角化且特征空间两两垂直,
* 存在正交矩阵 使得 是对角矩阵.

默认大家会证明这一命题.

**(1)** 记 是实对称矩阵, 证明 的最大特征值是 , 并考虑取达最大值的充要条件. 同时, 这也说明 可以改成 .

**(2)** 记 是实对称矩阵, 记最大特征值 的重数为 , 相应的特征向量是 . 证明 的第二大特征值是 . 此处, 是使得上一问取达最大值的任意向量.

**(3)** 假定 是实对称正定矩阵, 证明 和 互为倒数.

**(4)** 记 是实数, 满足 与 . 求

的最大值. 可以使用 **(2)** 的结论.

**Ex 3** 中学时有个定理: 记 与 是两个三维空间的几何体. 定义

记 是体积, 则 (无需证明这一命题).

我们可以将实对称正定矩阵 看作旋转后的长方体, 作为线性映射, 其功效是沿坐标轴的正向拉伸. 这一长方体的各边长即 的对角元, 体积即 .

假定 与 是 -阶实对称正定矩阵, 试证明:

Hint: Consider . Without the loss of generality, set .

**Ex 4** 正定与减法.

**(1)** 记 是实对称正定矩阵, 有标准正交的列向量. 证明 半正定.

Hint: Take (without the loss of generality), and just do it.

**(2)** 记 是正定矩阵, 的矩阵 . 证明: 正定等价于 正定.

若 对称正定, 试证明之; 若 亚正定 (不必对称但 ), 试给反例.

**(3)** (谢启鸿白皮书上的亚正定矩阵) 称实矩阵 是亚正定的, 当且仅当 对一切 成立. 简单地看, 亚正定是少了对称约束的正定. 若 亚正定, 对称, 且 亚正定, 试证明 也是亚正定的.

亚正定矩阵 (包括亚半定矩阵) 的一般结论见谢启鸿博客 [2015S12](https://www.cnblogs.com/torsor/p/12272213.html) 与 [2020S15](https://www.cnblogs.com/torsor/p/12389147.html).

亚正定矩阵的特征值实部为正, 故有且仅有一个平方根, 其特征根实部为正. 试问: 上述平方根仍是亚正定的吗?

**Ex 5** (极分解) 以下仅谈论对称半正定实方阵.

**(1)** 若 是对称半正定矩阵, 则存在唯一的对称半正定矩阵 使得 .

**(2)** 任何矩阵 都是对称半正定矩阵与正交矩阵的乘积 (不妨假设 ). 若 对称正定, 则这一分解唯一.

**(3)** 假定 实半正定, 正交. 若 , 则 .

Hint: 在 中有 Jordan 型, 从而可以被正交矩阵三角化. 考虑 .

这告诉我们: 当一个矩阵是正交的, 其上三角部分可以直接去掉.

**(4)** 证明两个半正定矩阵的乘积是可对角化的.

**Ex 6** (正交相似的判定准则) 称矩阵对 与 同时相似, 当且仅当存在可逆矩阵 使得

**(1)** 若 与 同时相似, 当且仅当 与 正交相似.

Hint: 对过渡矩阵 做极分解.

**(2)** 对复矩阵而言, 与 通过酉矩阵同时相似, 当且仅当 与 酉相似.

**(3)** 证明: 实矩阵 与 通过酉矩阵相似, 当且仅当 与 通过正交矩阵相似.

类似的问题: 与 相似, 当且仅当他们在某个扩域上相似.

思考: 假设两个 的实矩阵通过行列式为 的复矩阵相似, 那么它们一定通过某个行列式为 的实矩阵相似吗?

**(4)** 若 与 正交相似, 证明 与 正交相似.

**(5)** 若 和 既相似, 又合同, 则是否一定正交相似?

Hint: 王子涵会写, 可以问他.

**Challenging Problems**

**(1)** Assume are symmetric and positive definite. Prove that

is also positive definite. ( is also known as Stupid Matrix Product.)

Real Challenge: Prove it within 20 words. Hint: Kronecker product.

**(2)** Find the largest real number for each positive integer , such that for any real numbers , the following inequality holds:

Hint: Taking , it suffices to find the second largest eigenvalue Chebyshev matrix (逆矩阵-习题 8.) Another Hint: .

**(3)** Find the largest real number such that for any real numbers with , the following inequality holds:

Here , otherwise .

Hint: How to characterise the associated matrix? Maybe you can solve it by induction...

**(4)** Prove that

holds for arbitrary reals , and positive numbers , .

Hint: Let be symmetric positive definite with variable , then so is .

**(5)** Let be continuous in , such that . Suppose

Find . (Neither nor appears in the solution.)

Hint: Use (CS inequality). Set .

**Fun Exercise: -Distance Set Problem**

以下谈论的距离 (度量) 都是 上的通常距离 (度量), 即, .

1. 最多能在 中找到几个点, 使得这些点是等距的?

* 换言之, 求极大的子集 , 使得对任意 , 模长 是非零常数.

1. 称有限点集 是巧妙的, 当且仅当存在正数 , 使得

* 以下证明 . 在证明之前, 可以先自行尝试.

1. 记 是全体 元多项式. 记 , 试证明以下 个多项式是 -线性无关的:
2. 记巧妙集 . 定义函数

* 写出矩阵 .

1. 给定形如 的函数, 证明 的秩是 .
2. 使用 3., 4., 以及 5. 以证明 2..

**Elementary Exercise: The Geometry of Hadamard Matrix**

给定实向量空间 及其有限子集 . 定义 Gram 矩阵

Gram 行列式 是良定义的, 因为交换向量次序不改变行列式的值. 以下采用简便记号 .

1. 证明 当且仅当 是线性相关组.
2. 证明向量 到子空间 的距离是 .

* Hint: 使用唯一分解 .

1. 使用 Gram 行列式定义向量组的模长, 以及子空间之间的夹角.

* 其结果应当与向量的模长, 以及方向之间的夹角统一.

1. 定义 . 若 , 试证明
2. 记 是 的 个列向量, 记 . 证明,
3. 证明 Hadamard 不等式

* 并说明取等条件.